GUIA Nº1: EJERCICIOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

1. Hallar la probabilidad de sacar una suma de 8 puntos al lanzar dos dados.

2. Hallar la probabilidad de sacar por suma o bien 4, o bien 11 al lanzar dos dados.

3. Se escriben la azar las cinco vocales. ¿Cuál es la probabilidad de que la "e" aparezca primera y la "o" última.

4. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras de una urna que contiene 15 bolas blancas y 12 negras, sin reintegrar la bola extraída?

5. Una urna contiene 12 bolas blancas y 8 negras. Si se sacan dos bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

6. Una urna contiene 12 bolas blancas y 8 negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras reintegrando la bola extraída?

7. De una baraja española de 40 cartas ¿Cuál es la probabilidad de sacar un caballo seguido de un tres, reintegrando la primera carta? ¿Y sin reintegrarla?

8. Se sacan dos cartas de una baraja de 40 ¿Cuál es la probabilidad de que sean un caballo y un tres, reintegrando? ¿Y sin reintegrar?

10. Una urna contiene 8 bolas blancas, 5 negras y 2 rojas. Se extraen tres bolas al azar y se desea saber:

   a) La probabilidad de que las tres bolas sean blancas.
   b) La probabilidad de que dos sean blancas y una negra.

11. Se extraen 3 cartas de una baraja de 40:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean tres sotas.
   b) ¿Y de que sean un as, un dos y un tres?
   c) ¿Y de que salga un rey, seguido de un cinco y éste de un siete?

12. Una urna contiene dos bolas blancas y tres negras. Otra contiene seis blancas y cuatro negras. si extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean las dos negras?

13. Al lanzar dos veces un dado ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos sea divisible por tres?

15. Una caja contiene 8 bolas rojas, 4 azules y 6 verdes. Se extraen 3 bolas al azar y se desea saber:

   a) La probabilidad de que las tres sean rojas.
   b) La probabilidad de que dos sean rojas y una verde.
   c) La probabilidad de que dos sean azules y la otra de otro color.
   d) La probabilidad de que todas sean de distinto color.
   e) La probabilidad de que todas sean del mismo color.

16. Se lanza un dado 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salga algún 1 en los 6 lanzamientos?

17. Una caja contiene 2 bolas blancas, 3 negras y 4 rojas. Otra contiene 3 blancas, 5 negras y 4 rojas. Se toma una bola al azar de cada caja. ¿Qué probabilidad hay de que sean del mismo color?

18. En una urna hay 50 bolas, aparentemente iguales, numeradas del 1 al 50. ¿Qué probabilidad hay de sacar, una a una, las 50 bolas en el orden natural?

19. La probabilidad de acertar en un blanco de un disparo se estima en 0,2. La probabilidad de acertar al menos una vez en dos disparos será $p_1=0,04$; $p_2=0,36$; $p_3=0,12$. Determinar qué respuesta es la correcta.

20. ¿Cuál es la probabilidad de torpedear un barco, si sólo se pueden lanzar tres torpedos y la probabilidad de impacto de cada uno se estima en un 30 %?.

21. Se considera el experimento aleatorio "lanzar dos veces un dado". ¿Cuál es la probabilidad de obtener número par en el segundo lanzamiento condicionado a obtener impar en el primero? ¿Son dependientes o independientes estos sucesos? ¿Por qué?.

23. En una bolsa hay 8 bolas rojas, 10 negras y 6 blancas. Tres niños sacan, sucesivamente, dos bolas cada uno, sin reintegrar ninguna. Hallar la probabilidad de que el primero saque las dos rojas, el segundo las dos negras y el tercero las dos blancas?

25. Se realiza el experimento aleatorio de lanzar sucesivamente cuatro monedas al aire y se pide:

a) La probabilidad de obtener a lo sumo tres cruces.
b) La probabilidad de obtener dos caras.

26. Una pieza de artillería dispone de 7 obuses para alcanzar un objetivo. en cada disparo la probabilidad de alcanzarlo es 1/7. ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar el objetivo en los 7 disparos?

27. La probabilidad de que un hombre viva más de 25 años es de 3/5, la de una mujer es de 2/3. Se pide:

a) La probabilidad de que ambos vivan más de 25 años.
b) La probabilidad de que sólo viva más de 25 años el hombre.
c) La probabilidad de que sólo viva más de 25 años la mujer.
d) La probabilidad de que viva más de 25 años, al menos, uno de los dos.

35. En un hospital especializado en enfermedades de tórax ingresan un 50 % de enfermos de bronquitis, un 30 % de neumonía y un 20 % con gripe. La probabilidad de curación completa en cada una de dichas enfermedades es, respectivamente, 0,7; 0,8 y 0,9. Un enfermo internado en el hospital ha sido

dado de alta completamente curado. Hallar la probabilidad de que el enfermo dado de alta hubiera ingresado con bronquitis.

36. Hay una epidemia de cólera. Un síntoma muy importante es la diarrea, pero ese síntoma también se presenta en personas con intoxicación, y, aún, en personas que no tienen nada serio. La probabilidad de tener diarrea teniendo cólera, intoxicación y no teniendo nada serio es de 0,99; 0,5 y 0,004 respectivamente. Por otra parte, se sabe que el 2% de la población tiene cólera, el 0,5 % intoxicación y el resto (97,5 %), nada serio. Se desea saber:

a) Elegido un individuo de la población ¿Qué probabilidad hay de que tenga diarrea?
b) Se sabe que determinado individuo tiene diarrea ¿Cuál es la probabilidad de tenga cólera?

37. La probabilidad de que un artículo provenga de una fábrica A_1 es 0,7, y la probabilidad de que provenga de otra A_2 es 0,3. Se sabe que la fábrica A_1 produce un 4 por mil de artículos defectuosos y la A_2 un 8 por mil.

a) Se observa un artículo y se ve que está defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica A_2?
b) Se pide un artículo a una de las dos fábricas, elegida al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?
c) Se piden 5 artículos a la fábrica A_1 ¿Cuál es la probabilidad de que haya alguno defectuoso?

38. En una población animal hay epidemia. El 10 % de los machos y el 18 % de las hembras están enfermos. Se sabe además que hay doble número de hembras que de machos y se pide:

a) Elegido al azar un individuo de esa población ¿Cuál es la probabilidad de que esté enfermo?
b) Un individuo de esa población se sabe que está enfermo ¿Qué probabilidad hay de que el citado individuo sea macho?

39. En una clase mixta hay 30 alumnas, 15 estudiantes que repiten curso, de los que 10 son alumnos, y hay 15 alumnos que no repiten curso. Se pide:

a) ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?
b) Elegido al azar un estudiante ¿Cuál es la probabilidad de que sea alumno?
c) Elegido al azar un estudiante ¿Cuál es la probabilidad de que sea alumna y repita el curso?
d) Elegidos al azar dos estudiantes ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?

40. La probabilidad de que un alumno apruebe Matemáticas es 0,6, la de que apruebe Lengua es 0,5 y la de que apruebe las dos es 0,2. Hallar:

a) La probabilidad de que apruebe al menos una de las dos asignaturas.
b) La probabilidad de que no apruebe ninguna.
c) La probabilidad de que se apruebe Matemáticas y no Lengua.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

-

1. El espacio muestral es:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

donde las casillas sombreadas son los casos favorables. La probabilidad pedida será:

$$\mathbf{p = \frac{5}{36}}$$

2. El espacio muestral es el mismo de antes, es decir:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Y la probabilidad pedida es:

$$\mathbf{p = \frac{5}{36}}$$

3. Al escribir al azar las 5 vocales tenemos $P_5 = 5! = 120$ casos posibles. De entre ellos, si la e ha de aparecer la primera y la o la última, tenemos las otras 3 vocales que han de permutar en los tres lugares centrales, es decir, los casos favorables son $P_3 = 3! = 6$.

La probabilidad pedida es:

$$\mathbf{p = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}}$$

4. Las 12 bolas negras pueden tomar de 2 en 2 de $\mathbf{\binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66}$ maneras distintas (casos favorables). Mientras que las 27 bolas totales pueden tomarse de 2 en 2 de $\mathbf{\binom{27}{2} = \frac{27!}{2! \cdot 25!} = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351}$ maneras distintas (casos posibles). La probabilidad pedida es, pues:

$$\mathbf{p = \frac{66}{351} = \frac{22}{117}}$$

5. Sean los sucesos:

A= “Sacar las dos bolas blancas”
B= “Sacar las dos bolas negras”
C=”sacar las dos bolas del mismo color”

Según la composición de la urna se tiene que:

$$\mathbf{p(A)=\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}=\frac{132}{380}=\frac{33}{95}}$$
$$\mathbf{p(B)=\frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}=\frac{56}{380}=\frac{14}{95}}$$

Como una bola no puede ser al mismo tiempo blanca y negra (los sucesos A y B son incompatibles), se tiene que:

$$\mathbf{p(C)=p(A)+p(B)=\frac{33}{95}+\frac{14}{95}=\frac{47}{95}}$$

6. Sean los sucesos:

A= “ser negra la primera bola”
B= “ser negra la segunda bola”.

Los sucesos A y B son independientes pues el hecho de que la primera bola sea negra no afecta al hecho de que lo sea la 2ª (ya que la 1ª se devuelve a la urna de nuevo), se tiene:

$$\mathbf{p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)=\frac{8}{20}\cdot\frac{8}{20}=\frac{64}{400}=\frac{4}{25}}$$

7. Llamamos:

A= “sacar un caballo”
B= “sacar un tres”

Si reintegramos la primera carta, los sucesos son independientes y se tiene:

$$\mathbf{p(A\cap B)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}}$$

Si no reintegramos la primera carta los sucesos son dependientes y se tiene: Llamando:

C= “sacar un caballo la 1ª carta”
D= “sacar un 3 la 2ª carta”

$$\mathbf{p(C\cap D)=p(C)\cdot p(D/C)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}=\frac{16}{1560}=\frac{2}{195}}$$

8. (Este problema se diferencia del nº 7 en que allí había que sacar primero el caballo y luego el 3, ahora hay que sacar caballo y 3 no importa en que orden).

Llamando a los sucesos:

A= “sirve la 1ª carta” (es caballo o tres)
B= “sirve la 2ª carta” (es caballo o tres)

Reintegrando:

$$p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{8}{40} = \frac{32}{1600} = \frac{1}{50}$$

Sin reintegrar:

$$p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A) = \frac{4}{39} \cdot \frac{8}{40} = \frac{32}{1560} = \frac{4}{195}$$

10. Los casos posibles (en ambos casos) son las combinaciones de 15 elementos tomados de 3 en 3, es decir $\binom{15}{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} = 455$

a) En este caso los casos favorables son las diferentes formar de tomar las 8 bolas blancas en grupos de 3, es decir:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$$

siendo la probabilidad pedida:

$$p = \frac{56}{455} = \frac{8}{65}$$

b) En este segundo caso los casos favorables son el producto de las diferentes maneras de tomar las 8 bolas blancas de dos en dos por las diferentes maneras de tomar las 5 bolas negras de uno en uno, es decir:

$$\binom{8}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 5 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 5 = 140$$

y la probabilidad es:

$$p = \frac{140}{455} = \frac{28}{91} = \frac{4}{13}$$

11. a) Como el ejercicio está planteado sin devolución de las cartas extraídas previamente, se tendrá que, llamando A_1, A_2 y A_3 respectivamente a los sucesos ser sota la primera, la segunda y la tercera, tenemos que:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{24}{59280} = \frac{1}{2470}$$

ya que tras haber extraído la primera sota, sólo quedan tres y, tras haber extraído las dos primeras sólo quedan 2.

b) Llamemos:

A= “sirve la 1ª carta” (es un as un dos o un tres)
B= “sirve la 2ª carta
C= “sirve la 3ª carta.

Se tiene:

$$p(A)=\frac{12}{40}$$
$$p(B)=\frac{8}{39}$$
$$p(C)=\frac{4}{38}$$

ya que para la 1ª teníamos 12 casos favorables (4 ases, 4 doses y 4 treses) y 40 posibles. Para la segunda, si la primera ha servido, sólo quedan 8 casos favorables y 39 posibles. Para la 3ª, si las dos primeras han servido, sólo quedan 4 casos favorables y 38 posibles. Tenemos pues para la probabilidad pedida:

$$p(A\cap B\cap C)=\frac{12}{40}\cdot\frac{8}{39}\cdot\frac{4}{38}=\frac{384}{59280}=\frac{8}{1235}$$

c) En este caso sean:

A= “sacar un rey en la 1ª”
B= “sacar un cinco en la 2ª”
C= “sacar un siete en la 3ª”

Será:

$$p(A)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$
$$p(B/A)=\frac{4}{39}$$
$$p(C/A\cap B)=\frac{4}{38}=\frac{2}{19}$$
$$p(A\cap B\cap C)=\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{39}\cdot\frac{2}{19}=\frac{8}{7410}=\frac{4}{3705}$$

12. Sean los sucesos:

A= “sacar una bola negra de la 1ª urna”
B= “sacar una bola negra de la 2ª urna”

Se tiene que: $p(A)=\frac{3}{5}$ $\qquad p(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$
y, dado que los dos sucesos son independientes:

$$p(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

13. En la siguiente tabla de casos posibles aparecen sombreados los favorables (aquellos en los que la suma de puntos es divisible por 3)

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

La probabilidad pedida es, pues:

$$p=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

15. a) Sea A="extraer las tres bolas rojas", se tiene:

$$p(A)=\frac{\binom{8}{3}}{\binom{18}{3}}=\frac{\frac{8!}{3!\cdot 5!}}{\frac{18!}{3!\cdot 15!}}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{18\cdot 17\cdot 16}=\frac{336}{4896}=\frac{7}{102}$$

b) Sea B="extraer dos bolas rojas y una verde":

$$p(B)=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{18}{3}}=\frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 6}{\frac{18!}{3!\cdot 15!}}=\frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{2}}{\frac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2}}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 3\cdot 2}{18\cdot 17\cdot 16\cdot 2}=\frac{1008}{4896}=\frac{7}{34}$$

c) Sea C="extraer dos azules y una no azul":

$$p(C)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{14}{1}}{\binom{18}{3}}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 14}{\frac{18!}{3!\cdot 15!}}=\frac{\frac{4\cdot 3\cdot 14}{2}}{\frac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2}}=\frac{4\cdot 3\cdot 14\cdot 3\cdot 2}{18\cdot 17\cdot 16\cdot 2}=\frac{504}{4896}=\frac{7}{68}$$

d) Sea D="extraer todas de distinto color":

$$p(D)=\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{18}{3}}=\frac{8\cdot 4\cdot 6}{\frac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2}}=\frac{8\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 2}{18\cdot 17\cdot 16}=\frac{1152}{4896}=\frac{4}{17}$$

e) Sean los sucesos:

R= “extraer las tres rojas”
A= “extraer las tres azules”
V= “extraer las tres verdes”.

Se tiene que:

$$p(R) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{7}{102}$$

$$p(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{1}{204}$$

$$p(V) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{5}{204}$$

Y por ser los sucesos R, A y V incompatibles dos a dos se tiene que la probabilidad pedida es:

$$p(R \cup A \cup V) = \frac{7}{102} + \frac{1}{204} + \frac{5}{204} = \frac{20}{204} = \frac{5}{51}$$

16. Sea el suceso A=”sacar algún 1 en 6 lanzamientos” y sean A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, los sucesos “sacar un 1 en el primero (segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto) lanzamientos”. Se tiene que:

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = p(A_5) = p(A_6) = \frac{1}{6}$$

$$p(\overline{A}_1) = p(\overline{A}_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = p(\overline{A}_6) = \frac{5}{6}$$

Y como el suceso complementario de A (no sacar ningún 1 en los seis lanzamientos) es la intersección de estos seis últimos y éstos son independientes, se tiene:

$$p(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

$$p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 1 - \frac{15625}{46656} = \frac{31031}{46656}$$

17. Sean los sucesos:

A= “sacar las dos bolas blancas”
B= “sacar las dos bolas negras”
C= “sacar las dos bolas rojas”

Se tiene que los tres sucesos son incompatibles dos a dos y sus probabilidades son:

$$p(A)=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{12}=\frac{6}{108}$$
$$p(B)=\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{12}=\frac{15}{108}$$
$$p(C)=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{12}=\frac{16}{108}$$

Siendo la probabilidad pedida:

$$p(A\cup B\cup C)=\frac{6}{108}+\frac{15}{108}+\frac{16}{108}=\frac{37}{108}$$

18. Sea el suceso A= “sacar las 50 bolas en el orden 1, 2, 3, ...50”. El número de casos posibles son todas las permutaciones de 50 y solamente una de ellas constituye el caso favorable luego:

$$p(A)=\frac{1}{P_{50}}=\frac{1}{50!}$$

19. Sean los sucesos:

A= “acertar en dos disparos”
A_1= “acertar el primer disparo”
A_2= “acertar el segundo disparo”

Se tiene que:

$$p(A_1)=p(A_2)=0{,}2$$
$$p(\overline{A}_1)=p(\overline{A}_2)=0{,}8$$
$$\overline{A}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2$$

Y siendo estos dos últimos sucesos independientes se tiene:

$$p(\overline{A})=p(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2)=p(\overline{A}_1)\cdot p(\overline{A}_2)=0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}64\Rightarrow p(A)=1-0{,}64=0{,}36$$

20. Sean los sucesos:

A= “Acertar en alguno de los tres lanzamientos”
A_1= “acertar en el primer lanzamiento”
A_2= “acertar en el segundo lanzamiento”
A_3= “Acertar en el tercer lanzamiento”.

Se tiene que:

$$p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=0{,}3$$
$$p(\overline{A}_1)=p(\overline{A}_2)=p(\overline{A}_3)=0{,}7$$
$$\overline{A}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$$

y siendo estos tres últimos sucesos independientes se cumple que:

$$p(\overline{A}) = p(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}343$$

siendo entonces la probabilidad pedida:

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0{,}343 = 0{,}657$$

Otra forma de verlo:

P (acertar el 1º)	P (el 2º/no el 1º)	P (el 3º/no el 1º ni el 2º)	SUMA
0.3	0.3 X 0.7 = 0.21	0.3 X 0.7 X 0.7 = 0.147	0,657

21. Sean los sucesos:

A= “sacar impar en el primer lanzamiento”
B= “sacar par en el segundo lanzamiento”

La tabla del espacio muestral es (en ella se han señalado los casos favorables al suceso intersección de A y B):

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Se tiene que:

$$p(A) = p(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$p(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Que es la probabilidad pedida. Como además:

$$p(B/A) = p(B) = \frac{1}{2}$$

Queda demostrado que los sucesos A y B son independientes.

23. Sean los sucesos:

A= “el primer niño saca las dos rojas”.
B= “el segundo niño saca las dos negras habiendo sacado el 1º las dos rojas”.
C= “el tercer niño saca las dos blancas habiendo sacado el 1º las dos rojas y el segundo las dos negras”.
D= “el primer niño saca las dos rojas y el segundo las dos negras y el tercero las dos blancas”

Se tiene:

$$p(A)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{24}{2}}=\frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}}{\frac{24!}{2!\cdot 22!}}=\frac{8\cdot 7}{24\cdot 23}=\frac{56}{552}=\frac{7}{69}$$

$$p(B)=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{22}{2}}=\frac{\frac{10!}{2!\cdot 8!}}{\frac{22!}{2!\cdot 20!}}=\frac{10\cdot 9}{22\cdot 21}=\frac{90}{462}=\frac{15}{77}$$

$$p(C)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{\frac{6!}{2!\cdot 4!}}{\frac{20!}{2!\cdot 18!}}=\frac{6\cdot 5}{20\cdot 19}=\frac{30}{380}=\frac{3}{38}$$

$$p(D)=\frac{7}{69}\cdot\frac{15}{77}\cdot\frac{3}{38}=\frac{315}{201849}=\frac{15}{9614}$$

Ya que los sucesos A, B y C de esta forma definidos son independientes y D es la intersección de los tres.

Otra forma de verlo:

1º NIÑO	1º NIÑO	2º NIÑO	2º NIÑO	3º NIÑO	3º NIÑO	PRODUCTO	SIMPLIFICO
$\frac{8}{24}$	$\frac{7}{23}$	$\frac{10}{22}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{151200}{96909120}$	$\frac{15}{9614}$

24. Sea el suceso:

A= “sacar al menos un 6 en los n lanzamientos”
A_i= “sacar un seis en el i-ésimo lanzamiento” (donde i varía entre 1 y n)

Se tiene que:

$$p(A_i)=\frac{1}{6} \qquad \forall i \quad 1\leq i\leq n$$

entonces:

$$p(\overline{A}_i)=\frac{5}{6}$$

$$\overline{A}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap.....\cap\overline{A}_n$$

siendo estos n sucesos independientes. Se tiene pues que:

$$p(\overline{A}) = p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot ....p(\overline{A}_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

25. El espacio muestral tiene $RV_2^4 = 2^4 = 16$ elementos que son:

CCCC	+CCC	+CC+	+C++
CCC+	CC++	C++C	++C+
CC+C	C+C+	++CC	+++C
C+CC	+C+C	C+++	++++

a) Sea A= "obtener a lo sumo tres cruces (es decir, 0, 1, 2 ó 3)"

$$p(A) = \frac{15}{16}$$

b) Sea B= "obtener exactamente dos caras":

$$p(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

26. Sea el suceso A= "alcanzar el objetivo en al menos uno de los siete disparos"
A_i="alcanzar el objetivo en el disparo i-ésimo" (i varía de 1 a 7)

Se tiene:

$$p(A_i) = \frac{1}{7} \quad \forall i \quad 1 \le i \le 7$$

$$p(\overline{A}_i) = \frac{6}{7} \quad \forall i \quad 1 \le i \le 7$$

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap .... \cap \overline{A}_7$$

siendo estos 7 sucesos independientes, por lo tanto:

$$p(\overline{A}) = \left(\frac{6}{7}\right)^7$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 1 - \frac{279936}{823543} = \frac{543607}{823543}$$

Otra forma de verlo:

P (1º)	P (2º / no 1º)	,,,	,,,	,,,	,,,	P (7º / ningun anterior)	SUMA
0,14285714	0,12244898	0,10495627	0,08996252	0,07711073	0,06609491	0,05665278	0,66008332

27. Sean los sucesos: a)
A= “el hombre vive más de 25 años”.
B= “la mujer vive más de 25 años”.
C= “ambos viven más de 25 años”.

Se tiene que:

$$\mathbf{p(A)=\frac{3}{5}}$$

$$\mathbf{p(B)=\frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{p(C)=p(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}}$$

b) D= “sólo el hombre vive más de 25 años”.

$$\mathbf{p(D)=p(A\cap \overline{B})=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}}$$

a) c) E= “sólo la mujer vive más de 25 años”:

$$\mathbf{p(E)=p(\overline{A}\cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}}$$

d) F= “que viva más de 25 años al menos uno de los dos”

$$\mathbf{p(F)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{9+10-6}{15}=\frac{13}{15}}$$

35. Sean los sucesos:

A= “el enfermo se cura”
A_1= “el enfermo ingresa con bronquitis”.
A_2= “el enfermo ingresa con neumonía”
A_3= “el enfermo ingresa con gripe”

Sabemos del enunciado que:

$p(A_1)= 0{,}5$ $p(A_2)= 0{,}3$ $p(A_3)= 0{,}2$

$p(A/A_1)= 0{,}7$ $p(A/A_2)= 0{,}8$ $p(A/A_3)= 0{,}9$

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$\mathbf{p(A_1/A)=\frac{p(A/A_1)p(A_1)}{p(A/A_1)p(A_1)+p(A/A_2)p(A_2)+p(A/A_3)p(A_3)}=}$$

$$\mathbf{=\frac{0{,}7\cdot 0{,}5}{0{,}7\cdot 0{,}5+0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}2}=\frac{0{,}35}{0{,}77}=0{,}455}$$

36. Sean los sucesos:

A= “tienen diarrea”
A_1= “tienen cólera”
A_2= “tienen intoxicación”

A_2= “no tienen nada serio”

Sabemos que:

$p(A_1)$= 0,02 $p(A_2)$= 0,005 $p(A_3)$= 0,975
$p(A/A_1)$= 0,99 $p(A/A_2)$= 0,5 $p(A/A_3)$=0,004

a) Por el Teorema de la probabilidad total:

$$\mathbf{p(A) = p(A/A_1)p(A_1) + p(A/A_2)p(A_2) + p(A/A_3)p(A_3) =}$$
$$\mathbf{= 0{,}99 \cdot 0{,}02 + 0{,}5 \cdot 0{,}005 + 0{,}004 \cdot 0{,}975 = 0{,}0262}$$

b) Por el Teorema de Bayes:

$$\mathbf{p(A_1/A) = \frac{p(A/A_1)p(A_1)}{p(A/A_1)p(A_1) + p(A/A_2)p(A_2) + p(A/A_3)p(A_3)} =}$$
$$\mathbf{= \frac{0{,}99 \cdot 0{,}002}{0{,}99 \cdot 0{,}002 + 0{,}5 \cdot 0{,}005 + 0{,}004 \cdot 0{,}995} = \frac{0{,}00198}{0{,}0262} = 0{,}0756}$$

OJO: Este en realidad da: 0,756 -→ donde dice 0,002 es 0,02

37. Sean los sucesos:

A= “el artículo es defectuoso”
A_1= “el artículo procede de la 1ª fábrica”
A_2= “el artículo procede de la 2ª fábrica”.

Sabemos que:

$p(A_1)$= 0,7 $p(A_2)$= 0,3
$p(A/A_1)$= 0,004 $p(A/A_2)$= 0,008

a) Por el Teorema de Bayes:

$$\mathbf{p(A_2/A) = \frac{p(A/A_2)p(A_2)}{p(A/A_1)p(A_1) + p(A/A_2)p(A_2)} =}$$
$$\mathbf{= \frac{0{,}008 \cdot 0{,}3}{0{,}004 \cdot 0{,}7 + 0{,}008 \cdot 0{,}3} = \frac{0{,}0024}{0{,}0052} = 0{,}462}$$

b) Por el Teorema de la probabilidad Total:

p(A)= 0,0052

ya que las operaciones a realizar en dicho Teorema coinciden con el denominador de la fórmula de Bayes anteriormente calculado.

c) Es mas facil calcular la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso:

$$\mathbf{p(\overline{B}) = p(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap .... \cap \overline{B}_5) = 0{,}996^5}$$

siendo entonces la probabilidad pedida: 1 – P(no haya ningun defectuoso)

1 – 0,98 = 0,02

38. Sean los sucesos:

A= “el animal está enfermo”
A_1= “el animal es macho”
A_2= “el animal es hembra”

Se sabe que:

$p(A_1)= 1/3$ $\quad$ $p(A_2)= 2/3$

$p(A/A_1)= 0,1$ $\quad$ $p(A/A_2)=0,18$

a) Por el Teorema de la probabilidad Total:

$$\mathbf{p(A) = p(A / A_1)p(A_1) + p(A / A_2)p(A_2) =}$$
$$\mathbf{= 0{,}1 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}18 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}153}$$

b) Por el Teorema de Bayes:

$$\mathbf{p(A_1 / A) = \frac{p(A / A_1)p(A_1)}{p(A / A_1)p(A_1) + p(A / A_2)p(A_2)} =}$$
$$\mathbf{= \frac{0{,}1 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}1 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}18 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{0{,}033}{0{,}153} = 0{,}218}$$

39. a) Observemos la siguiente tabla de contingencia:

	no repiten	repiten	total
alumnos	15	10	**25**
alumnas	**25**	**5**	30
estudiantes	**40**	15	**55**

Donde están señalados en negrita los datos no proporcionados por el enunciado pero que fácilmente se obtienen de él.

b) Sea el suceso A= “ser alumno un estudiante elegido al azar”. Será:
$$\mathbf{p(A) = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}}$$

c) Sea el suceso B= “ser alumna y repetidora un estudiante elegido al azar”. Será:

$$\mathbf{p(B) = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}}$$

d) Sea el suceso C= “ser no repetidores dos estudiantes elegidos al azar”. Tendremos:

$$p(C)=\frac{\binom{40}{2}}{\binom{55}{2}}=\frac{\frac{40!}{2!\cdot 38!}}{\frac{55!}{2!\cdot 53!}}=\frac{\frac{40\cdot 39}{2}}{\frac{55\cdot 54}{2}}=\frac{40\cdot 39}{55\cdot 54}=\frac{1560}{2970}=\frac{156}{297}=\frac{52}{99}$$

40. Sean los sucesos:

A= “aprobar matemáticas un alumno”
B= “aprobar lengua”
C= “aprobar matemáticas y lengua”

Se sabe que: p(A)= 0,6 p(B)= 0,5 p(C)=0,2

a) Sea D= “aprobar una de las dos”.

$$p(D)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=$$
$$=0{,}6+0{,}5-0{,}2=0{,}9$$

b) Sea E= “no aprobar ninguna de las dos”.

$$p(E)=p(\overline{D})=1-p(D)=1-0{,}9=0{,}1$$

c) Sea F= “aprobar matemáticas y no lengua”.

$$F=A\cap\overline{B}$$
$$A=A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

donde hemos tenido en cuenta que el suceso del primer paréntesis es el suceso seguro (de probabilidad 1) y hemos aplicado la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión.

Como los dos sucesos obtenidos en el último miembro son incompatibles, tenemos:

$$p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})\Rightarrow p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)=$$
$$=0{,}6-0{,}2=0{,}4$$

Es util graficar el Diag. Para verlo mejor: